

差曲面拓扑的齿轮啮合刚度计算与 承载接触分析

魏冰阳, 杨建军, 聂少武

(河南科技大学 机电工程学院, 河南 洛阳 471000)

摘 要: 基于齿条-齿轮等切共轭产形原理, 构建齿面数值模型、ease-off 差齿面, 对 ease-off 蕴含的齿面啮合信息进行解析, 获得了齿面接触路径、传动误差、接触线瀑布图; 综合 ease-off 拓扑仿真与齿轮刚度非线性单元耦合解析, 给出了修形拓扑齿面的啮合刚度、承载传动误差的计算方法。沿接触路径遍历接触线序列, 获得了齿轮时变啮合刚度、承载传动误差与载荷分布图; 给出了 2 阶抛物面对称与对角拓扑两种修形形式算例, 求出了系列载荷作用下的啮合刚度、承载传动误差、齿面载荷分布。结果显示: 随着载荷的增加, 齿轮啮合刚度时变效应明显减弱; 承载传动误差波动与啮合刚度、修形梯度密切相关; 对角修形在啮合刚度、传动误差、载荷分布特性方面好于对称修形。

关 键 词: 等切产形; 抛物面; 差曲线; 传动误差; 拓扑修形

中图分类号: V231; TH132.4

文献标志码: A

Calculation of gear meshing stiffness and loaded tooth contact analysis based on ease-off surface topology

WEI Bingyang, YANG Jianjun, NIE Shaowu

(School of Mechanical and Electronic Engineering,

Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan 471000, China)

Abstract: Based on the theory of rack-gear equal-tangential conjugate generating, the construction of numerical model of tooth surface and ease-off surface of gears was presented. Through analysis on the tooth surface meshing information of ease-off surface implication, the contact path, transmission errors and falls of contact line were obtained. Combining the ease-off simulation of tooth surface and the non-linear element coupling gear stiffness analysis, the computational method on time-varying meshing stiffness, loaded transmission errors for the modified tooth surface was presented. The computation was done by traversing the sequence contact lines according to the contact path, then the tooth meshing stiffness, loaded transmission errors and load distribution map were obtained. Two examples on topological tooth surface for symmetrical and bias modification of the 2-order paraboloid were acquired, and a series of results for the tooth meshing stiffness, loaded transmission errors and load distribution map under varied loads were gained. Results showed that the varied effects of tooth meshing stiffness weakened obviously with the increasing loads, and the fluctuation of loaded transmission errors was closely related to meshing stiffness and modification gradient

收稿日期: 2019-05-15

基金项目: 国家自然科学基金(51875174, 51705134)

作者简介: 魏冰阳(1966—), 男, 教授、博士生导师, 博士, 研究方向为齿轮的先进设计与制造技术。

引用格式: 魏冰阳, 杨建军, 聂少武. 差曲面拓扑的齿轮啮合刚度计算与承载接触分析[J]. 航空动力学报, 2019, 34(12): 2745-2752.

WEI Bingyang, YANG Jianjun, NIE Shaowu. Calculation of gear meshing stiffness and loaded tooth contact analysis based on ease-off surface topology[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(12): 2745-2752.

of tooth surface. The bias modification was better than the symmetrical one in the performance of meshing stiffness, loaded transmission errors and load distribution.

Key words: equal-tangential generating; paraboloid; contact line-off; transmission errors; topology modification

齿轮的啮合刚度计算和轮齿接触分析(tooth contact analysis/loaded tooth contact analysis, TCA/LTCA)对于齿轮传动系统动力学分析至关重要。20 世纪 90 代,TCA/LTCA 技术在复杂齿面的设计方面逐渐得到应用^[1-2]。文献[1-5]借助 TCA 技术,发展了“局部综合”法,实现了齿面接触印痕与传动误差的预控。文献[6-7]发展了一种更适宜数值计算的 ease-off 差齿面分析方法。文献[8-9]利用 ease-off 拓扑,解决了弧齿锥齿轮高阶传动误差拓扑,直齿锥齿轮低安装误差敏感性设计与预控的问题。文献[10-11]发展了 ease-off 等距变换分析方法,据此提出了曲面综合弧齿锥齿轮加工参数计算方法。利用 TCA、ease-off 曲面拓扑,文献[12]研究了高阶传动误差斜齿轮修形设计与实现方法。尽管目前 ease-off 差齿面在齿面三维拓扑设计方面得到了广泛的应用,但对 ease-off 曲面的拓扑映射、啮合信息解析尚存在不足。

轮齿刚度计算方法主要有材料力学石川公式、弹性力学势能法和有限元法等。由于有限元法模型僵化,无法实现参数化建模,目前在齿轮系统动力学分析时较多采用势能法。文献[13]综合弯曲、剪切、径向压缩、赫兹接触和轮体 5 种变形势能对直齿轮进行刚度分析,文献[14]建立了考虑齿向修形的直齿轮啮合刚度解析模型,与有限元方法对比,两种方法求解的啮合刚度相对误差不超过 5%^[13-14],且计算效率远大于有限元方法。文献[15-16]提出了一种啮合刚度与传动误差耦合的非线性激励解析模型,分析了轮齿误差、齿廓修形量对啮合刚度的影响。文献[17]提出了一种通用的斜齿轮啮合刚度解析计算方法,建立了轮齿误差和斜齿轮啮合刚度相耦合的非线性激励计算模型,对不同修形参数对斜齿轮啮合刚度的影响规律进行了研究。文献[18]给出了斜齿轮齿根圆与基圆不重合时的啮合刚度计算修正算法。

综合上述研究成果,目前对渐开线斜齿圆柱齿轮的啮合刚度可以进行较准确地解析计算,但针对不同拓扑修形的齿面数字化方法尚存在不足,尤其对于新发展的 ease-off 修形与承载接触

分析尚待进一步研究。鉴于此,本文利用齿条-齿轮等切共轭产形原理,准确的构建了 ease-off 差齿面模型,利用 ease-off 蕴含的啮合信息解析齿轮时变啮合刚度算法,获得了轮齿承载传动误差与载荷分布特性,使啮合刚度计算与承载接触分析更加便捷。

1 齿条产形与 ease-off 曲面构建

1.1 齿条产成渐开线圆柱齿轮模型

给出以 u, v 为参数的二元二次多项式曲面

$$w(u, v) = a_0 + a_1 u^2 + a_2 uv + a_3 v^2 \tag{1}$$

通过式(1)系数可对曲面结构实现控形。 a_1 控制齿廓修形量, a_2 控制修形扭转量, a_3 控制齿向修形量。在图 1 所示坐标系 $S_0(O_0; x_0, y_0, z_0)$ 中,曲面 w 的法矢为 n, π 为产形齿条曲面。利用矢量旋转变换,绕 x_0 旋转压力角 α ,绕 y_0 旋转螺旋角 β ,斜齿条方程在 S_0 坐标系表示为

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}^T = T(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T \tag{2}$$

式中

$$T(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\alpha \sin\beta & \cos\alpha \sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \sin\alpha \cos\beta & \cos\alpha \cos\beta \end{bmatrix}^T$$

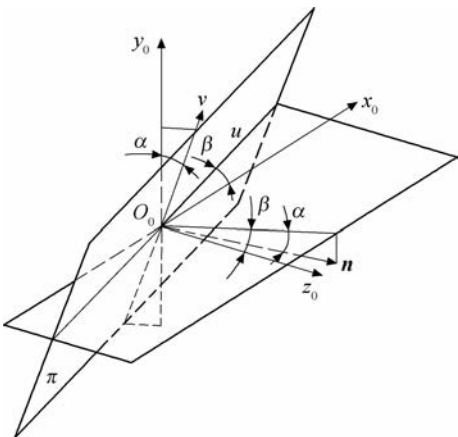


图 1 齿条面坐标系

Fig. 1 Coordinate system of gear rack surface

建立齿条与圆柱齿轮产成坐标系,如图 2 所示,经坐标变换,由啮合方程可推得圆柱齿轮啮合转角

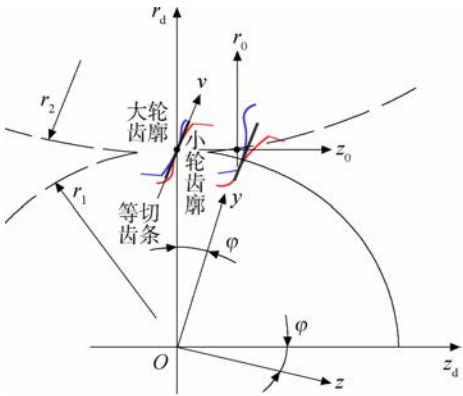


图 2 齿条-齿面产成坐标系

Fig. 2 Generating coordinate between gear rack and gear surface

$$\varphi(u,v) = \frac{n_z y_0 - n_y z_0}{n_y r_0} \tag{3}$$

式中 r_0 为齿轮节圆半径,法矢 $\boldsymbol{n}$ 分量 n_y 、 n_z 由式(1)、式(2)确定。

通过坐标变换,可求出圆柱齿轮齿面方程与法矢量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{1,s} &= \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{n}_{1,s} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{r} &= [x_0 \quad y_0 + r_0 \quad z_0 + r_0 \cdot \phi]^T \end{aligned} \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 为 S_d 到 S_1 坐标变换矩阵

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

当多项式(式(1))系数取不同的值时,将生成不同的齿面拓扑结构 $\boldsymbol{r}_1(u,v)$,当式(1)为平面方程,即作为直廓齿条产成标准渐开线圆柱齿轮 $\boldsymbol{r}_s(u,v)$ 。 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_s$ 之间的法向误差为渐开线齿面的修形量 z_d ,从而把全齿面修形量用差齿面 ease-off 表示出来。

1.2 2 阶拓扑修形的 Ease-off 曲面

本文齿轮参数选取如下:齿数比 $z_1/z_2 = 21/62$,压力角 $\alpha = 20^\circ$,螺旋角 $\beta = 13^\circ$,法向模数 $m_n = 5\text{ mm}$,齿宽 $B = 80\text{ mm}$,变位系数 $x_1 = 0.1$, $x_2 = -0.1$ 。

因齿条平面 Σ_0 左右两侧分别与小轮 Σ_1 、大轮 Σ_2 相切(图 2),三者展成运动中一直保持等切共轭啮合关系, Σ_1 、 Σ_0 、 Σ_2 三者之间的映射必定是一一的同胚映射。以齿条平面 Σ_0 为坐标平面(u,v 为参数)做映射,绘制网格点的离差 z_d ,从而得到齿轮共轭啮合的差齿面 ease-off,如图 3 所示。

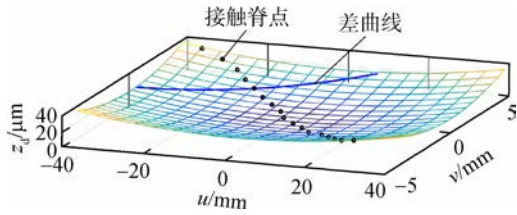


图 3 差齿面 ease-off

Fig. 3 Ease-off for gear surface

2 差齿面 ease-off 的啮合信息解析

2.1 差曲线与接触路径

由式(3)可知,任意小轮转角 φ_i 值,对应一系列 (u_i, v_i) 值,由 ease-off 曲面插值可得一系列 z_{di} ,它代表 ease-off 曲面上一条瞬时接触线 s_i ,简称差曲线(contact line-off),如图 3 所示,图中 u 表示齿长, v 表示齿宽。差曲线切方向为瞬时接触椭圆长轴方向。差曲线反映了齿面修形由线接触转变为点接触形成的差曲率。遍历 φ_i 值,可得到若干差曲线序列形成的曲线簇 $s(\varphi)$

$$s_{(i)} = s(\varphi_i), \quad \varphi_{(i)} = \varphi[u_{(i,j)}, v_{(i,j)}] \tag{5}$$

式中 i 表示差曲线序列, j 表示差曲线上点的序列。

如果把式(5)中一系列的差曲线脊点(图 3 中差曲线 s_i 最低点)与投影面相切,可绘制出如图 4 所示的差曲线瀑布图。脊点轨迹呈现了齿面的接触路径与方向。差曲线瀑布的垂直高度反映了瞬时接触线任意位置的离差 z_s 。

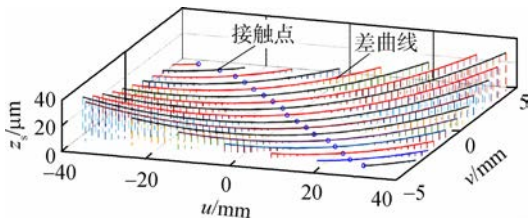


图 4 差曲线瀑布图

Fig. 4 Waterfall figure of contact line-off

2.2 传动误差

在 ease-off 曲面上提取脊点轨迹,可得以小轮转角(单位:°)为横坐标的传动误差曲线(transmission errors, TE, 量符号记为 E_t) (单位: μm)。图 5 中给出了三幅传动误差^[3],代表相邻三齿交替啮合的过程,标出了三齿、二齿啮合区段。

由式(1)~式(5)可一次性完成齿面数字化,包括网格点的坐标、法矢量和 ease-off 曲面求解,

解析传动误差 TE、差曲线,勿需求解非线性方程组和 2 阶微分参量,就可为啮合刚度计算、LTCA 分析提供全面、准确的齿面数据。

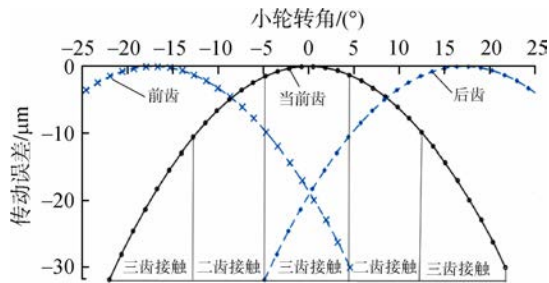


图 5 传动误差
Fig. 5 Transmission error

3 啮合刚度计算

3.1 齿廓时变刚度矩阵

根据斜齿轮模型,截取其中一段,作为直齿圆柱齿轮齿廓单元。沿齿廓方向,以 v 为变量,把齿廓划分为 n 个单元,宽为 Δy 。分别改变作用力 F 的位置(图 6 中 M 点),计算该位置的刚度数值。图中 s_z 、 l_y 分别为 M 点到齿廓对称线与齿根圆的距离。

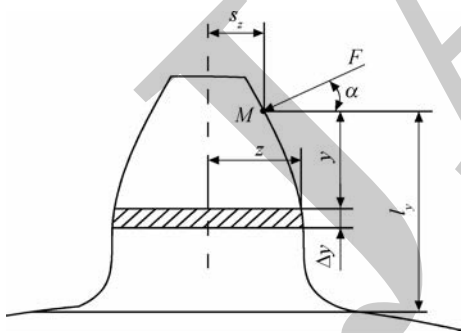


图 6 齿廓受力模型
Fig. 6 Load condition model of flank

齿轮啮合刚度包括 5 个部分^[13]: 弯曲刚度 k_1 、剪切刚度 k_2 、径向压缩刚度 k_3 和基体刚度 k_4 (本文略,对于薄壁圆柱齿轮的计算,则不可忽略)、赫兹接触刚度 k^c 。齿轮副的啮合刚度为各部分刚度的并联形式,即

$$\frac{1}{k_v^{(p,g)}} = \frac{1}{k^p} + \frac{1}{k^g} + \frac{1}{k^c}, \quad \frac{1}{k^{(p,g)}} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{k_i^{(p,g)}} \tag{6}$$

把式(6)中各刚度分量表示成数值积分的形式

$$\frac{1}{k_1^{(p,g)}} = \frac{1}{E} (n_z^2 t_1 - 2 n_z n_y s_z t_2 + s_z^2 n_y^2 t_3)$$
$$\frac{1}{k_2^{(p,g)}} = \frac{1 \cdot 2 n_z^2}{G} t_4, \quad \frac{1}{k_3^{(p,g)}} = \frac{n_y^2}{E} t_3$$
$$\frac{1}{k^c} = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E B}$$

$$t_1 = \sum_{y=0}^{l_0} \frac{y^2}{I_y} \Delta y, \quad t_2 = \sum \frac{y}{I_y} \Delta y$$
$$t_3 = \sum \frac{1}{I_y} \Delta y, \quad t_4 = \sum \frac{1}{A_y} \Delta y$$

式中上标 p、g 分别指代小轮和大轮, $A_y = 2 s_z \cdot B$, $I_y = 2 s_z^3 \cdot B/3$ 分别为啮合点 M 处相对于齿根的截面积和惯性矩,可由数值积分得到(大小轮计算方法相同)。

遍历变量 $v_i \in [v_{\min}, v_{\max}] (i = 1, 2, \dots, n)$, 可得到齿廓时变刚度矩阵

$$\mathbf{K}_v^{(p,g)} = [k_{v1}^{(p,g)}, k_{v2}^{(p,g)}, \dots, k_{vn}^{(p,g)}] \tag{7}$$

3.2 接触线离散单元刚度矩阵

斜齿轮接触线与直齿轮相比是倾斜的,接触线上每个啮合点的空间位置不同(图 7),其对应点的刚度也不同。 s_2 、 s_i 、 s_{30} 代表不同位置的接触线。

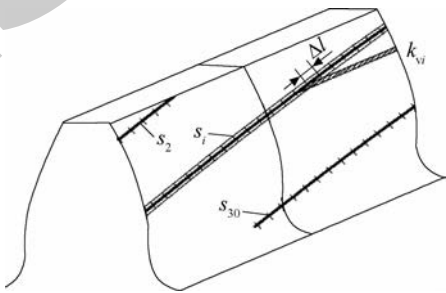


图 7 接触线离散模型
Fig. 7 Discrete model of contact line

假设把接触线离散为若干单元,每一单元投影到端面上,都会映射一段齿廓,对应齿廓位置的刚度数值 $k_v^{(i)}$,式(7)中的一个单元 $k_v^{(i)}$ (计作 k_{vj}^p 和 k_{vj}^g)。每条接触线都可以离散为一个单元刚度矩阵。每一单元的接触线长度为 Δl ,则对于任意单元的啮合刚度为

$$\frac{1}{k_j} = \frac{1}{k_{vj}^p \cdot \Delta l} + \frac{1}{k_{vj}^g \cdot \Delta l} \tag{8}$$

由前述模型可知

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta v)^2 + (\Delta u)^2}$$

由于齿面修形,除了接触脊点,接触线其他位置均存在离差 z_s (图 4 差曲线),那么在法向载荷 F 作用下,假设有 m 个单元参与接触,接触脊产

生的法向变形量为 δ , 载荷 F 由 m 个单元承担(图 8), 任意单元的位移量为 $(\delta - z_{sj})$, 则

$$\delta \cdot \sum_{j=1}^m k_j = F + \sum_{j=1}^m k_j \cdot z_{sj}, \quad F = \sum_{j=1}^m f_j \quad (9)$$

式(9)的收敛条件为变形能 W 最小

$$W = \sum_{j=1}^m f_j \cdot (\delta_j - z_{sj}) \quad (10)$$

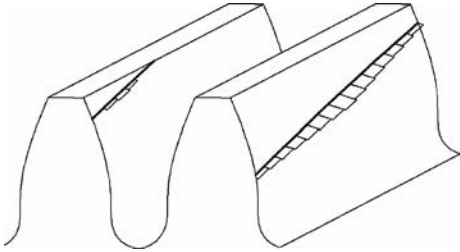


图 8 载荷二齿分担模型

Fig. 8 Load share model between adjacent two teeth

求出实际接触单元数 m 后, 对应不同转角 φ 的啮合刚度 K_φ 、变形量 δ_φ 、载荷分布 $F_\varphi = \sum [f_1, f_2, \dots, f_m]$ 就可确定。对潜在的多齿接触区(图 5、图 8), 在同一瞬时则要考虑两条(或三条)接触线在载荷作用下接触发展顺序。例如, 对于二齿接触区, 后加入啮合的接触单元, 要计入对应点的传动误差数值(图 5), 按照接触线单元的总离差进行排序, 在单元载荷作用下, 变形由小到大依次发展, 达到 m 个单元接触, 分担载荷 F , 变形能平衡。按照这一过程, 遍历接触线序列, 求出一系列 K_φ 、 δ_φ 、 F_φ 。

对于接触路径上, 任意瞬时转角位置转角 φ 的承载传动误差 (loaded transmission errors, LTE) $E_{lt, \varphi}$ 数值为

$$E_{lt, \varphi} = \delta_\varphi + E_{t, \varphi} \quad (11)$$

式中 $E_{t, \varphi}$ 表示任意瞬时位置 φ 的传动误差。上述刚度算法是一种完全数值化的方法, 用法线分量替代三角函数(式(6)), 由齿条变量计算接触线长度(式(8)), 齿面经网格数字化后, 其任意一点的刚度数值可以很便利的求出, 构成齿面刚度矩阵。

4 算 例

取大轮承载扭矩为 750、1 500、2 250、3 000、3 750、4 500、6 000 N·m, 对应法向载荷 F 分别为 5、10、15、20、25、30、40 kN。计算过程如下:

1) 根据小、大轮端面齿廓, 划分 200 个单元, 单元高度 $\Delta v = 0.04$ mm, 计算沿齿廓变化的刚度矩阵 $\mathbf{K}_v^{(p)}$ 、 $\mathbf{K}_v^{(g)}$ (式(7))。

2) 齿长方向单元数取 2 000 个, 每一单元宽度 $\Delta u = 0.04$ mm, 计算接触线离散单元刚度序列 $k_{vj}^{(p)} \cdot \Delta l$ 、 $k_{vj}^{(g)} \cdot \Delta l$ (式(8))。

3) 计入接触线离差 z_s (图 4)、几何传动误差 TE (图 5), 求变形量 δ 、接触单元数 m (式(9))。

4) 遍历转角 φ (取 34 个点), 求出任意接触位置的啮合刚度 $K_\varphi = F/\delta_\varphi$ 、承载传动误差 LTE (式(10)), 结果分别如图 9(a) 和图 9(b) 所示。

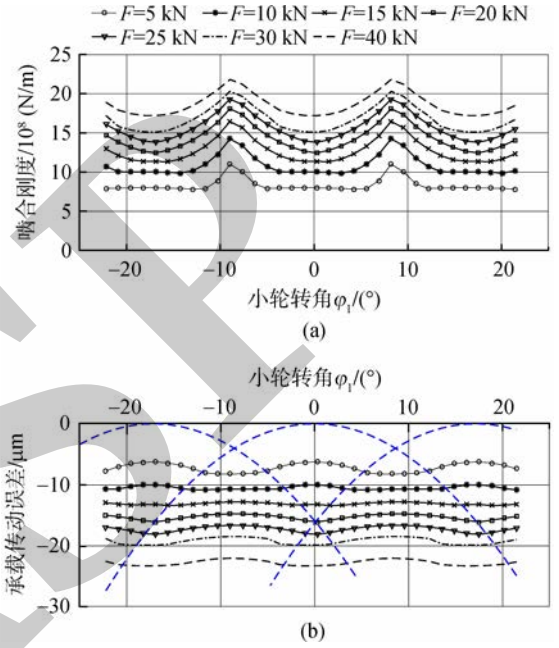


图 9 承载时变啮合刚度与承载传动误差

Fig. 9 Time-varying meshing stiffness and LTE

5) 根据各个单元承担的载荷, 求和后则可以得到齿面载荷 f 分布状况。图 10(a) 和图 10(b) 给出了 $F = 20, 40$ kN 时载荷分布状况图(不同颜

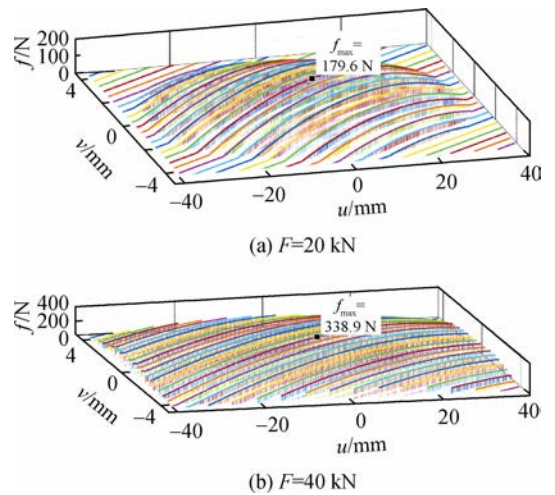


图 10 齿面载荷分布

Fig. 10 Load distribution on gear surface

色的曲线对应小轮不同转角的接触线),图 10(b)中, $F=40\text{ kN}$ 齿面载荷分布达到了满载,齿面边缘进入了接触。

由图 9 可以看出,齿轮即使经过修形,承载下仍然存在明显的刚度变化,刚度剧变发生在二齿交替位置,啮合传动中的刚度激励不可避免。随着载荷的增大,接触区扩展、多齿耦合作用下,轮齿啮合刚度显著增强。 $F=20\text{ kN}$ 刚度波动幅度达到最大(0.563 GN/m),后逐渐减小, $F=40\text{ kN}$ 时波动幅度减小到 0.462 GN/m 。从波动幅度及相对数值看,刚度的时变效应明显减弱,LTE 变化与此基本一致。在中低载荷下($F=15\text{ kN}$)LTE 波动最小(图 9(b)),这符合工程应用经验:中低载荷范围齿轮传动最为平稳。但此时刚度波动不一定最小,所以承载传动误差 LTE 激励与啮合刚度激励不一定成正相关关系。对于刚度激励更应该看其波动的相对量级和分散程度,对于传动误差激励则应该看其波动及绝对幅值的大小。

随着载荷的增加,LTE 波动没有明显的变化,但轮齿总的变形量明显增大,其对传动的激励将占据主导位置。

5 齿面对角修形分析

对式(1)取 $a_1=4.32\times 10^{-6}$, $a_2=-6.48\times 10^{-6}$, $a_3=4.03\times 10^{-4}$,计算得到的 ease-off 曲面梯度如图 11 所示,其修形梯度呈对角形态,扭转方向沿对角线与接触路径方向一致。

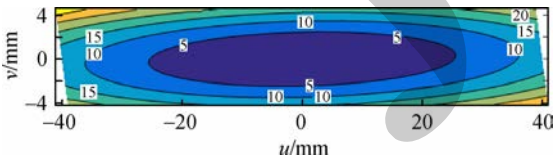


图 11 齿面对角修形梯度

Fig. 11 Gradient of gear surface with diagonal modification

为了与图 3 对称修形比较,预置相同的抛物线几何传动误差,计算啮合刚度与 LTE,结果如图 12 所示。图中对比了 $F=20, 40\text{ kN}$ 两种工作载荷下的啮合刚度与 LTE 曲线的变化情况,图中 $E_{lt,1}$ 、 $E_{lt,2}$ 分别表示对称修形与对角修形的 LTE, $k_{m,1}$ 、 $k_{m,2}$ 分别表示对称修形与对角修形的啮合刚度。从图中可以看出:对角修形的啮合刚度平均提高了 $1.0\times 10^8\text{ N/m}$,承载传动误差 LTE 减小了 $1\mu\text{m}$,其波动也有一定程度的减小。预示对角

修形具有更好的动态性能。

对角修形后 $F=20, 40\text{ kN}$ 两种载荷分布如图 13 所示(不同颜色的曲线对应小轮不同转角的接触线)。与图 10 对比,齿面中部峰值载荷 $f_{\max}$ 分别降低 19.1、18.8 N,载荷分布更趋均匀,这对于减小齿面应力集中有利。由此可见,对角修形是一种更好的齿面拓扑形式,能对接触线方向进行控制,从而增加齿面接触线累计长度,提高轮齿的啮合刚度,改善齿轮副的动态啮合性能。

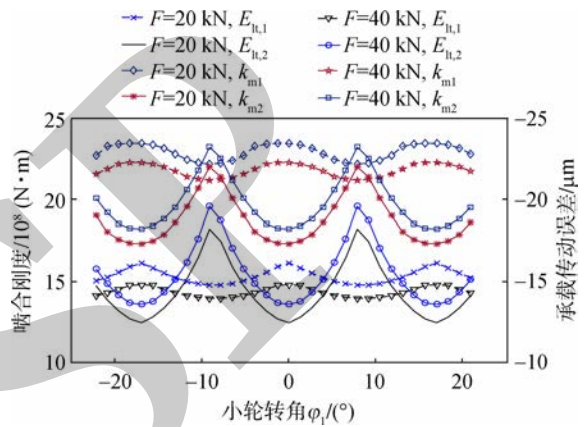


图 12 啮合刚度与 LTE 对比

Fig. 12 Comparison of meshing stiffness and LTE

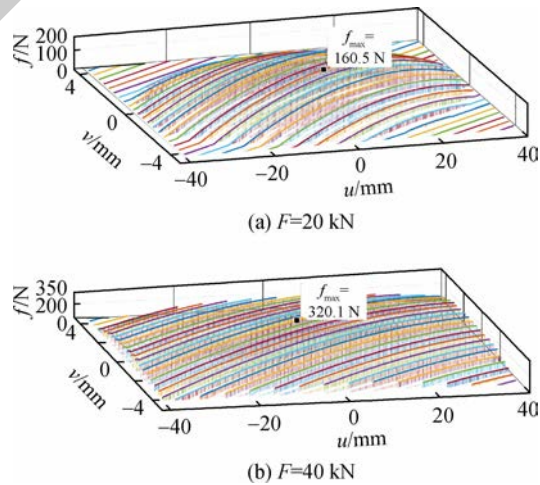


图 13 齿面对角修形载荷分布

Fig. 13 Load distribution of gear surface with diagonal modification

F 在 $20\sim 40\text{ kN}$ 范围内,齿轮副没有发生边缘接触,最大载荷为 40 kN 时刚好得到满载状况,说明传动误差 TE 幅值控制在 $27\sim 32\mu\text{m}$,ease-off 离差控制在 $30\sim 40\mu\text{m}$ 范围,对于所设计齿轮副是合适的。

6 结 论

本文提出了一种基于 ease-off 差齿面解析的啮合刚度算法与承载接触分析方法。主要研究结论如下:

1) 利用齿条-齿轮等切共轭产形,能够准确构建数值齿面模型、ease-off 差齿面,获取完备的啮合信息,通过 2 阶多项式对齿面拓扑结构进行控形控性。

2) 利用 ease-off 差齿面,结合轮齿刚度解析法,能够便捷获得轮齿时变啮合刚度、承载传动误差与载荷分布图。所给出的方法易于参数化数值解析,避免了非线性方程组求解、2 阶微分计算、有限元模型僵化和巨量运算问题。

3) 修形齿轮副刚度激励仍然难以避免,随着载荷增大,齿轮综合刚度显著增大,啮合刚度的时变效应明显减弱;承载传动误差 LTE 与刚度时变、修形梯度密切相关,LTE 在中低载荷范围有一个相对平稳区。

4) 对角修形效果优于对称修形,对轮齿啮合刚度、传动误差、载荷分布特性具有明显的改善作用。

参考文献:

- [1] LITIVN F L. Local synthesis and tooth analysis of face-milled of spiral bevel gears[R]. NASA-CR4342,1990.
- [2] LITIVN F L. Computerized design, simulation of meshing and contact and stress analysis of face-milled formate generated spiral bevel gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(5): 441-459.
- [3] 方宗德,刘涛,邓效忠.基于传动误差设计的弧齿锥齿轮啮合分析[J].航空学报,2002,23(3):226-230.
FANG Zongde, LIU Tao, DENG Xiaozhong. Tooth contact analysis of spiral bevel gears based on the design of transmission error[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2002, 23(3): 226-230. (in Chinese)
- [4] 曹雪梅,张华,方宗德.航空弧齿锥齿轮承载传动误差的分析与设计[J].航空动力学报,2009,24(11):2618-2624.
CAO Xuemei, ZHANG Hua, FANG Zongde. Design and analysis of loaded transmission errors for aviation spiral bevel gears [J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(11): 2618-2624. (in Chinese)
- [5] 唐进元,卢延峰,周超.螺旋锥齿轮齿面接触分析改进算法研究[J].航空动力学报,2009,24(1):189-195.
TANG Jinyuan, LU Yanfang, ZHOU Chao. Research on improved tooth contact analysis algorithm of spiral bevel gears[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(1): 189-195. (in Chinese)
- [6] STADTFELD H J. What "Ease-off" shows about bevel

and hypoid gears[J]. Gear Technology, 2001, 18(5): 18-23.

- [7] 陈书涵,严宏志,明兴祖,等.螺旋锥齿轮差曲面模的建立与仿真[J].系统仿真学报,2009,21(11):3430-3433.
CHEN Shuhan, YAN Hongzhi, MING Xingzu, et al. Difference surface model establishment and simulation in spiral bevel gear[J]. Journal of System Simulation, 2009, 21(11): 3430-3433. (in Chinese)
- [8] 曹雪梅,邓效忠,聂少武.基于共轭齿面修正的航空弧齿锥齿轮高阶传动误差齿面拓扑结构设计[J].航空动力学报,2015,30(1):195-200.
CAO Xuemei, DENG Xiaozhong, NIE Shaowu. Ease-off flank topography design for aviation spiral bevel gears with higher-order transmission errors by modification of conjugate[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(1): 195-200. (in Chinese)
- [9] 曹雪梅,孙宁,邓效忠.直齿锥齿轮低安装误差敏感设计与实验验证[J].航空动力学报,2016,31(1):227-232.
CAO Xuemei, SUN Ning, DENG Xiaozhong. Design for straight bevel gear based on low installation error sensitivity and experiment tests[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(1): 227-232. (in Chinese)
- [10] 魏冰阳,邓效忠,全昂鑫,等.曲面综合法弧齿锥齿轮加工参数计算[J].机械工程学报,2016,52(1):20-25.
WEI Bingyang, DENG Xiaozhong, TONG Angxin, et al. Surface synthesis method on generating parameters computation of spiral bevel gears[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(1): 20-25. (in Chinese)
- [11] 魏冰阳,杨建军,全昂鑫,等.基于等距 Ease-off 曲面的轮齿啮合仿真分析[J].航空动力学报,2017,32(5):1259-1265.
WEI Bingyang, YANG Jianjun, TONG Angxin, et al. Tooth meshing simulation and analysis based on isometric mapping ease-off surface[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(5): 1259-1265. (in Chinese)
- [12] 蒋进科,方宗德,苏进展.高阶传动误差斜齿轮修形设计与加工[J].哈尔滨工业大学学报,2014,46(9):43-49.
JIANG Jinke, FANG Zongde, SU Jinzhan. Design and grinding for modified helical gears with a higher-order transmission error[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2014, 46(9): 43-49. (in Chinese)
- [13] FAKHE R C, TAHAR F, MOHAMED H. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gear mesh stiffness[J]. European Journal of Mechanics: A Solids, 2009, 28(3): 461-468.
- [14] 王奇斌,张义民.齿向修形直齿轮系统动力学特性分析[J].振动工程学报,2016,29(1):61-68.
WANG Qibin, ZHANG Yimin. Dynamic characteristics analysis of a spur gear system with the lead crown relief [J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(1): 61-68. (in Chinese)
- [15] CHEN Zaigang, SHAO Yimin. Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and

tooth root crack[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013,62(8):63-74.

[16] CHEN Zaigang,SHAO Yimin. Mesh stiffness of an Internal spur gear pair with ring gear rim deformation[J]. Mechanism and Machine Theory,2013,69(10):1-12.

[17] 魏静,赖育彬,秦大同,等. 齿廓修形斜齿轮副啮合刚度解析计算模型[J]. 振动与冲击,2018,37(10):94-101.

WEI Jing,LAI Yubin,QIN Datong,et al. Analytical model of the mesh stiffness of helical gear pair after tooth profile modification[J]. Journal of Vibration and Shock,2018,37(10):94-101. (in Chinese)

[18] 刘文,李锐,张晋红,等. 斜齿轮时变啮合刚度算法修正及影响因素研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2018,45(2):1-10.

LIU Wen,LI Rui,ZHANG Jinhong,et al. Study on correction algorithm of time-varying mesh stiffness of helical gears and its influencing factors[J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences),2018,45(2):1-10. (in Chinese)

(编辑:王碧珺)